Linear Systems and LU

CS 205A: Mathematical Methods for Robotics, Vision, and Graphics

Doug James (and Justin Solomon)

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

Homework

Analyzing

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination

1. Homework 0: Posted on website later today. Due next Thurs (use Gradescope) 2. Late Policy: The deadline to upload your work to Gradescope will be Thursday 11:59 pm. You have a total of 3 late periods. Using a late period means you can submit an assignment by Sunday 11:59 pm. If you exhaust your late periods, late assignments will be penalized at 50%. No work will be accepted after the late deadline.

•0

イロト イポト イヨト イヨト

LU Factorization LU with Pivoting

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting 00

Other Announcements

New Section Room

- Time: Friday, 11:30-12:20pm
- Place: 260-113 ("Language Corner")

Julia programming refs on webpage

・ロト ・四ト ・ヨト ・ヨト

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting •000000 000000

Linear Systems

$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$\vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$$
$$\vec{b} \in \mathbb{R}^{m}$$

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

4 / 47

000000 000000

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Case 1: Solvable

$\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}-1\\1\end{array}\right)$ "Completely Determined"

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

5 / 47

0000000 000000

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Case 2: No Solution

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ "Overdetermined"

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

6 / 47

Case 3: Infinitely Many Solutions

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ "Underdetermined"

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

7 / 47

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting 0000000 000000

No Other Cases

Proposition

If $A\vec{x} = \vec{b}$ has two distinct solutions \vec{x}_0 and \vec{x}_1 , it has infinitely many solutions.

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Common Misconception

Solvability *can* depend on \vec{b} !

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing 0000000 000000

LU Factorization LU with Pivoting

Dependence on Shape

Proposition

Tall matrices admit unsolvable right hand sides.

Proposition

Wide matrices admit right hand sides with infinite numbers of solutions.

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

For Now

All matrices will be: Square Invertible

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

11 / 47

0000000 000000

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Inverting Matrices

Do *not* compute A^{-1} if you do not need it.

- Not the same as solving $A\vec{x} = b$
- Can be slow and poorly conditioned

Example

Permute rows

- Row scaling
- Forward/back substitution

13 / 47

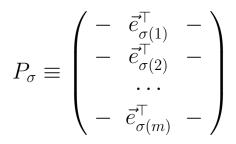
э

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Row Operations: Permutation

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

$$\sigma: \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,m\}$$



CS 205A: Mathematical Methods

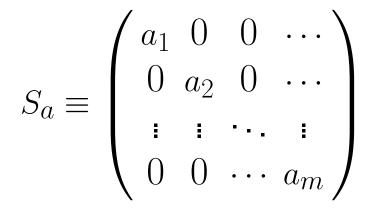
00000000 00000

Linear Systems and LU

14 / 47

Row Operations: Row Scaling

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting



CS 205A: Mathematical Methods

0000000 000000

Linear Systems and LU

15 / 47

イロン イロン イヨン イヨン

Row Operations: Elimination

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

"Scale row k by constant cand add result to row ℓ ."

$$E \equiv I + c\vec{e}_{\ell}\vec{e}_{k}^{\top}$$



CS 205A: Mathematical Methods

00000000 000000

Linear Systems and LU

16 / 47

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing UU Factorization LU with Pivoting OCOCONSCIENCE Solving via Elimination Matrices

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 3 & -1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & -2 & | & -3 \end{pmatrix}$

Reverse order!

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

17 / 47

Introducing Gaussian Elimination

^{Big idea:} General strategy to solve linear systems via row operations.

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

18 / 47

Elimination Matrix Interpretation

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$E_1 A\vec{x} = E_1 \vec{b}$$

$$E_2 E_1 A\vec{x} = E_2 E_1 \vec{b}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{E_k \cdots E_2 E_1 A}_{I_{n \times n}} \vec{x} = \underbrace{E_k \cdots E_2 E_1}_{A^{-1}} \vec{b}$$

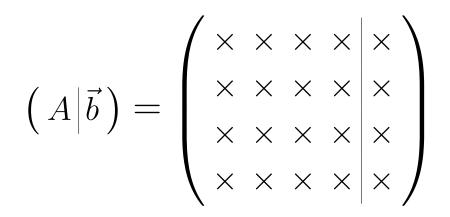
≣ ► < ≣ ► 19 / 47

< □ > < 同 >

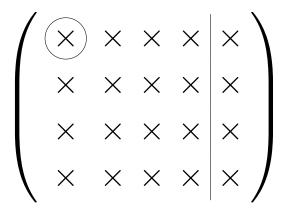
0000000000

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Shape of Systems



Pivot



CS 205A: Mathematical Methods

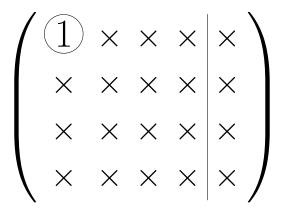
Linear Systems and LU

21 / 47

э

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

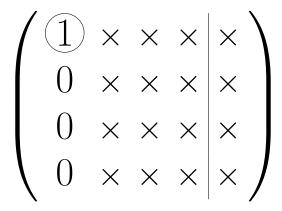
Row Scaling



Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

00000000000

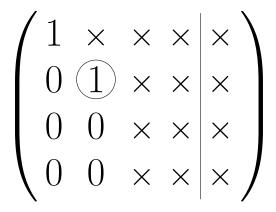
Forward Substitution



Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

00000000000

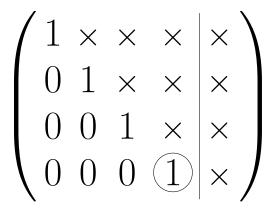
Forward Substitution



イロト 不得 トイヨト イヨト

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Upper Triangular Form



CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

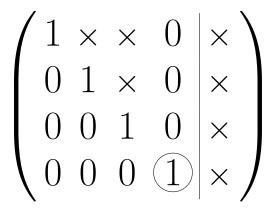
25 / 47

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

0000000000000

Back Substitution

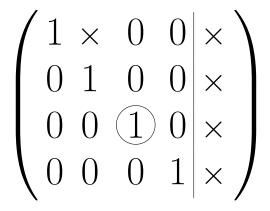


< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

0000000000

Back Substitution



CS 205A: Mathematical Methods

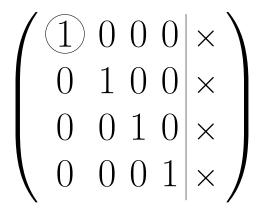
Linear Systems and LU

27 / 47

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Back Substitution



CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

28 / 47

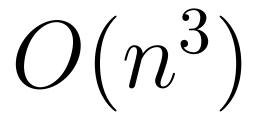
Steps of Gaussian Elimination

1. Forward substitution: For each row $i = 1, 2, \ldots, m$

- Scale row to get pivot 1
- For each j > i, subtract multiple of row
- *i* from row *j* to zero out pivot column **2.** Backward substitution: For each row $i = m, m - 1, \dots, 1$
 - For each j < i, zero out rest of column

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting 00000

Total Running Time



CS 205A: Mathematical Methods

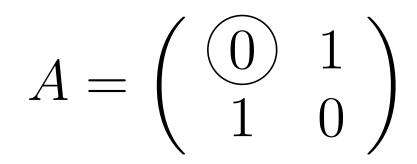
Linear Systems and LU

30 / 47

00000

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Problem



CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

31 / 47

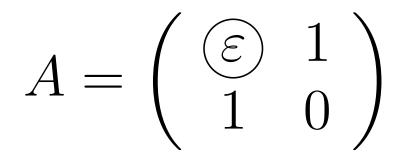
э

・ロン ・聞と ・ ヨン ・ ヨン

00000

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Even Worse



э

・ロン ・聞と ・ ヨン ・ ヨン

Pivoting

Pivoting

Permuting rows and/or columns to avoid dividing by small numbers or zero.

- Partial pivoting
- Full pivoting

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 10 & -10 \\ 0 & 0.1 & 9 \\ 0 & 4 & 6.2 \end{array}\right)$$

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Reasonable Use Case

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$$
$$A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$$
$$\vdots$$

Can we restructure A to make this more efficient?

Does each solve take $O(n^3)$ time?

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing

00000000000

LU Factorization LU with Pivoting

Observation

Steps of Gaussian elimination depend only on structure of A

Avoid repeating identical arithmetic on A?

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting 0000000000

Another Clue: Upper Triangular Systems

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

36 / 47

3

イロト 不得 トイヨト イヨト

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting 00000000000

After Back Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & 0 & | \\ 0 & 1 & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & | \\ \end{pmatrix}$$

No need to subtract the 0's explicitly! O(n) time

 Announcements
 Solvability
 Solving Linear Systems
 Gaussian Elimination
 Analyzing
 LU Factorization
 LU with Pivoting

 00
 0000000
 0000000
 0000000
 00000000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000

Next Pivot: Same Observation

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \times & 0 & 0 & | \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | \\ \hline (0) & (0) & 1 & (0) & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \\ \end{array}\right)$$

Observation

Triangular systems can be solved in $O(n^2)$ time.

イロト 不得 トイヨト イヨト

Upper Triangular Part of \boldsymbol{A}

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

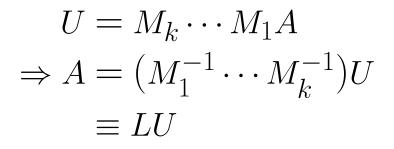
 \vdots
 $M_k \cdots M_1 A \vec{x} = M_k \cdots M_1 \vec{b}$
Define:
 $U \equiv M_k \cdots M_1 A$

э.

・ロト ・四ト ・ヨト ・ヨト

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Lower Triangular Part



CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

▲ロ▶ ▲冊▶ ▲ヨ▶ ▲ヨ▶ - ヨ - のの⊙ 40 / 47

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

000000000000

Why Is L Triangular?

$$S \equiv \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots)$$
$$E \equiv I + c \vec{e}_{\ell} \vec{e}_k^{\top}$$

Proposition

The product of triangular matrices is triangular.

41 / 47

Solving Systems Using LU

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing

$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$\Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$$

1. Solve $L\vec{y} = \vec{b}$ using forward substitution. 2. Solve $U\vec{x} = \vec{y}$ using backward substitution.

$$O(n^2)$$
 (given LU factorization)

CS 205A: Mathematical Methods

LU Factorization LU with Pivoting

Announcements Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

LU: Compact Storage

$\left(\begin{array}{cccc} U & U & U & U \\ L & U & U & U \\ L & L & U & U \\ L & L & L & U \end{array} \right)$

Assumption: Diagonal elements of L are 1. Warning: Do not multiply this matrix!

 Announcements
 Solvability
 Solving Linear Systems
 Gaussian Elimination
 Analyzing
 LU Factorization
 LU with Pivoting

 00
 0000000
 0000000
 000000000
 00000
 00000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000000000
 00000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000
 0000

Computing LU Factorization

Small modification of forward substitution step to keep track of L.¹

¹See textbook for pseudocode.

Linear Systems and LU

44 / 47

Question

Does every A admit a factorization A = LU?

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

45 / 47

Solvability Solving Linear Systems Gaussian Elimination Analyzing LU Factorization LU with Pivoting

Recall: Pivoting

Pivoting

Permuting rows and/or columns to avoid dividing by small numbers or zero.

- Partial pivoting
- Full pivoting

$$\left(\begin{array}{rrrr}1 & 10 & -10\\0 & 0.1 & 9\\0 & 4 & 6.2\end{array}\right)$$

Pivoting by Swapping Columns

$$\underbrace{(E_k \cdots E_1)}_{\text{elimination}} \cdot A \cdot \underbrace{(P_1 \cdots P_\ell)}_{\text{permutations}} \cdot \underbrace{(P_\ell^\top \cdots P_1^\top)}_{\text{inv. permutations}} \vec{x}$$

$$= (E_k \cdots E_1)\vec{b}$$
$$\Downarrow$$
$$A = LUP$$

CS 205A: Mathematical Methods

Linear Systems and LU

4 □ ▷ < ⑦ ▷ < Ξ ▷ < Ξ ▷ < Ξ ▷ </p>
47 / 47